УДК 517.962

ОБ $\inf - \sup$-УСЛОВИЯХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРАХ В ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р.З. ДАУТОВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: rdautov@kpfu.ru

ON $\inf - \sup$ CONDITIONS AND PROJECTIONS SPECIFIC IN THE THEORY OF MIXED FINITE-ELEMENT METHODS

R.Z. DAUTOV

Kazan Federal University

Аннотация

Указываются ограничения на пространства конечных элементов, которые гарантируют выполнение дискретных inf–sup-условий, а также существование специальных проекторов, характерных для смешанных методов конечных элементов. Рассматриваются как конформные, так и неконформные аппроксимации. Предложен способ определения специальных проекторов на векторное пространство конечных элементов, позволяющий доказать их существование при весьма общих условиях без определения степеней свободы элементов.

Ключевые слова: $\inf - \sup$-условие, LBB-условие, смешанные методы конечных элементов, специальные проекторы

Summary

We indicate constraints on the space of finite elements providing the validity of discrete inf-sup conditions and the existence of projections specific for mixed finite-element methods. We consider both conformal and nonconformal approximations. We suggest a definition of special projections onto the vector space of finite elements which provides their existence under quite general conditions without determining the degrees of freedom of the elements.

Key words: $\inf - \sup$-condition, LBB-condition, mixed finite element methods, special fem projectors

Введение

Пусть X и Y — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно и $b: X \times Y \to R$ — ограниченная билинейная форма. Говорят, что форма b удовлетворяет $\inf - \sup$-условию, если найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sup_{\tau \in Y}(|b(v,\tau)|/\|\tau\|_Y) \geqslant C\|v\|_X, \quad v \in X. \tag{1}$$

В теории смешанных методов конечных элементов важную роль играет форма

$$b(v,\tau) = \int\limits_{\Omega} v \nabla \cdot \tau \, dx, \tag{2}$$

когда $X = L_p(\Omega)$, а пространство $Y = H_q(\mathrm{div};\Omega) = \{\tau \in [L_q(\Omega)]^d : \nabla \cdot \tau \in L_q(\Omega)\}$ наделяется естественной нормой $\|\tau\|^q_{H_q(\mathrm{div};\Omega)} = \|\tau\|^q_{0,q,\Omega} + \|\nabla \cdot \tau\|^q_{0,q,\Omega}$, где $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ есть норма в $W^s_p(\Omega)$. Если X_h и Y_h — конечномерные аппроксимации X и Y соответственно, зависящие от параметра h, а b_h — аппроксимация b, то неравенство, получающееся заменой в (1) тройки (b, X, Y) на (b_h, X_h, Y_h), называют дискретным $\inf-\sup$ -условием. В этом случае, как правило, важно, чтобы постоянная C в полученном неравенстве не зависела от h.

Далее указываются ограничения на пространства конечных элементов, которые гарантируют как выполнение дискретных $\inf-\sup$ -условий для формы (2), так и существование специальных проекторов, характерных для смешанных методов конечных элементов. Допускаются неконформные аппроксимации.

1. Непрерывные $\inf-\sup$ -условия

Для пространства вектор-функций $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_d)$ с компонентами из $W_q^s(\Omega)$ используется обозначение $[W_q^s(\Omega)]^d$. Оно наделяется нормой и полунормами

$$\|\tau\|_{s,q,\Omega}=\left(\sum_{k=0}^{s}|\tau|_{k,q,\Omega}^{q}\right)^{1/q},\quad |\tau|_{k,q,\Omega}=\left(\sum_{i=1}^{d}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha\tau_i|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Далее обозначение $(\cdot,\cdot)_D$ используется для скалярного произведения как в скалярном $L_2(D)$, так и в векторном $[L_2(D)]^d$ случае, где либо $D\subset R^d$, либо $D\subset R^{d-1}$. Таким образом, если $u,v\in L_2(D)$, а $\tau,\sigma\in[L_2(D)]^d$, то

$$(u,v)_D=\int\limits_D uv\,dx,\quad (\tau,\sigma)_D=\int\limits_D \tau\cdot\sigma\,dx.$$

Пусть $C_F(\Omega)$ есть постоянная в неравенстве Фридрихса

$$\|v\|_{0,p,B}\leqslant C_F(\Omega)|v|_{1,p,B},\quad v\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(B)=\{u\in W_p^1(B):\ u|_{\partial B}=0\},$$

где $B\supseteq\Omega$ – минимальная область с гладкой границей. Известна оценка $C_F(\Omega)\leqslant\ell$, где ℓ – диаметр области Ω или ее толщина в каком-либо направлении.

Теорема 1. *Пусть $\Omega\subset R^d$ – ограниченная область, $d\geqslant 2$. Тогда*

$$\sup_{\tau\in[W_q^1(\Omega)]^d}(|(v,\nabla\cdot\tau)_\Omega|/\|\tau\|_{1,q,\Omega})\geqslant C_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega},\quad v\in L_p(\Omega),$$

где $p\in(1,\infty),\ 1/p+1/q=1,\ C_D(\Omega)=(C^q(d,q)+C_F^q(\Omega))^{1/q},\ C(d,2)=1.$

Теорема 2. *Пусть $\Omega\subset R^d$ – ограниченная область, $d\geqslant 2$. Тогда*

$$\sup_{\tau\in H_q(\mathrm{div};\Omega)}(|(v,\nabla\cdot\tau)_\Omega|/\|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\Omega)})\geqslant C_d^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega},\quad v\in L_p(\Omega),$$

где $p\in(1,\infty),\ C_d(\Omega)=(1+C_F^q(\Omega))^{1/q}.$

При более сильных ограничениях на Ω теорема 2 доказана в [1], [2].

2. Триангуляция области.

Далее $\Omega\subset R^d$ – произвольная ограниченная многогранная область, $d\geqslant 2$, h – положительный параметр. Через $\mathcal{T}_h=\{K_1,K_2,\ldots,K_{N(h)}\}$ будем обозначать разбиение Ω на многогранники (конечные элементы) максимального диаметра h, K_i считаются открытыми множествами. Будем придерживаться следующих соглашений.

Через K обозначаем произвольный элемент из $\mathcal{T}_h$. Под гранями элемента K понимаются его $(d-1)$-мерные грани (замкнутые множества), через e обозначается произвольная грань K. Если $e\subset\partial\Omega$, то e называется граничной гранью, иначе – внутренней (т.е. $e=\bar K\cap\bar L,\ K,L\in\mathcal{T}_h$). Через ∂K, $\mathcal{E}_h$ и $\mathcal{E}_h^\partial$ будем обозначать как множество, так и объединение всех граней K, всех внутренних и всех граничных граней соответственно; так что $\bar{\mathcal{E}}_h=\mathcal{E}_h\cup\mathcal{E}_h^\partial$ является как множеством, так и объединением всех граней. Далее под n_K будем понимать поле единичных нормалей на ∂K, направленных вне K. След функции u на множестве D обозначаем через $u|_D$.

На триангуляцию $\mathcal{T}_h$ наложим следующие ограничения:

T_1) $K_i \cap K_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N(h)} \overline{K}_i$;

T_2) триангуляция $\mathcal{T}_h$ является конформной, т.е. всякая грань K есть или подмножество границы $\partial\Omega$ или грань другого элемента;

T_3) каждый элемент $K \in \mathcal{T}_h$ является образом некоторого $\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}$ при обратимом аффинном преобразовании: $K = F_K(\hat{K})$, $F_K(x) = B_K\hat{x} + b_K$, где $\hat{\mathcal{T}}$ — конечный, не зависящий от h, набор многогранников в R^d единичного диаметра, называемых базисными элементами (т.о. допускаются элементы различных форм);

T_4) триангуляция $\mathcal{T}_h$ является регулярной, т.е. $\|B_K\| \sim h$, $\|B_K^{-1}\| \sim h^{-1}$, $K \in \mathcal{T}_h$.

Здесь и далее выражение $f \sim g$ означает, что $cg \leqslant f \leqslant Cg$, постоянные c и C обозначают положительные постоянные, не зависящие как от h, так и от Ω.

Далее через u, v будем обозначать скалярные функции, через τ, σ — векторные. Они считаются определенными на области Ω. Скалярные функции, определенные на $\bar{\mathcal{E}}_h$, обозначаются через λ, μ. Используются также следующие обозначения:

$$(w, \eta)_{\mathcal{T}_h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (w, \eta)_K, \quad \|w\|_{s,p,\mathcal{T}_h} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w\|_{s,p,K}^p \right)^{1/p}.$$

На основе триангуляции $\mathcal{T}_h$ определим пространство $W_p^s(\mathcal{T}_h)$ как подпространство функций из $L_p(\Omega)$, сужения которых на элемент $K \in \mathcal{T}_h$ принадлежат пространству $W_p^s(K)$; оно снабжается нормой $\|\cdot\|_{s,p,\mathcal{T}_h}$. Аналогично определяется $H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)$ как подпространство $[L_q(\Omega)]^d$ с нормой $\|\tau\|_{H_q(\mathrm{div};\mathcal{T}_h)} = (\|\tau\|_{0,q,\Omega}^q + \|\nabla \cdot \tau\|_{0,q,\mathcal{T}_h}^q)^{1/q}$.

3. Локальные пространства конечных элементов.

На каждом базисном элементе $\hat{K} \in \hat{\mathcal{T}}$ определим тройку $(V(\hat{K}), W(\hat{K}), \Lambda(\partial\hat{K}))$ конечномерных пространств, где $V(\hat{K})$ — пространство скалярных функций на $\hat{K}$, $W(\hat{K})$ — d-мерных вектор-функций на $\hat{K}$ и $\Lambda(\hat{K})$ — пространство скалярных функций на $\partial\hat{K}$. Используя аффинное преобразование $\hat{K} \to K$, определим тройку пространств $(V(K), W(K), \Lambda(\partial K))$ на каждом конечном элементе $K \in \mathcal{T}_h$. Точнее, пусть $\hat{K}$ — соответствующий K базисный элемент, $x = F_K(\hat{x}) = B_K\hat{x} + b_K$ — невырожденное преобразование $\hat{K} \to K$. Положим $|B_K| = \det(B_K)$,

$$V(K) = \{v = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in V(\hat{K})\}, \quad \Lambda(\partial K) = \{\lambda = \hat{\lambda} \circ F_K^{-1},\ \hat{\lambda} \in \Lambda(\partial\hat{K})\},$$

$$W(K) = \{\tau = |B_K|^{-1} B_K(\hat{\tau} \circ F_K^{-1}),\ \hat{\tau} \in W(\hat{K})\}.$$

Обозначим через 1_D функцию, тождественно равную единице на множестве D. Пусть

$$\boldsymbol{V}(K) = V(K) \times \Lambda(\partial K), \quad \boldsymbol{V}_0(K) = \{(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}(K) :\ (v, \lambda) = c(1_K, 1_{\partial K}),\ c \in R\}.$$

Сформулируем основные ограничения на выбор указанных пространств:

H_1) $V(K) \subset W_\infty^1(K)$, $W(K) \subset [W_\infty^1(K)]^d$, $\Lambda(\partial K) \subset L_\infty(\partial K)$,
$V(K) \supseteq P_0(K)$, $W(K) \supseteq [P_0(K)]^d$, $\Lambda(\partial K) \supseteq P_0(\partial K)$,

где $P_0(D)$ — множество тождественно постоянных на D функций.

H_2) если $(v, \lambda) \in V(K) \times \Lambda(\partial K)$, то из соотношения

$$-(v, \nabla \cdot \tau)_K + (\lambda, \tau \cdot n_K)_{\partial K} = 0, \quad \tau \in W(K),$$

следует, что $(v, \lambda) \in \boldsymbol{V}_0(K)$.

3.1. Локальный дискретный градиент. В пространствах $W(K)$ и $\boldsymbol{V}(K)$ введем скалярные произведения, полагая $(\tau, \sigma)_{W(K)} = (\tau, \sigma)_K$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}(K)} = (u, v)_K + h(\lambda, \mu)_{\partial K}$. На $\boldsymbol{V}(K)$ введем также полунорму

$$|\boldsymbol{v}|_{1,p,K} = \|\nabla v\|_{0,p,K} + h^{-1/q}\|v - \lambda\|_{0,p,\partial K}.$$

Нетрудно видеть, что она является нормой в фактор-пространстве $\boldsymbol{V}(K)/\boldsymbol{V}_0(K)$.

Определим оператор $\nabla_K:\ \boldsymbol{V}(K)\to W(K)$ по правилу

$$(\nabla_K \boldsymbol{v},\tau)_{W(K)} = -(v,\nabla\cdot\tau)_K + (\lambda,\tau\cdot n_K)_{\partial K},\quad \tau\in W(K),\quad \boldsymbol{v}=(v,\lambda)\in \boldsymbol{V}(K),$$

и будем называть его локальным дискретным градиентом. Далее под условиями $H_{1,2})$ понимаем одновременное выполнение условий $H_1)$ и $H_2)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2})$. *Тогда* $\ker(\nabla_K)=\boldsymbol{V}_0(K)$ *и*

$$\|\nabla_K \boldsymbol{v}\|_{0,p,K}\sim \sup_{\tau\in W(K)}\left(|(\nabla_K\boldsymbol{v},\tau)_K|/\|\tau\|_{0,q,K}\right)\sim |\boldsymbol{v}|_{1,p,K},\quad \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}(K).$$

3.2. Локальный проектор. Имеем $\ker(\nabla_K)=\boldsymbol{V}_0(K)$. Пусть $\boldsymbol{V}_0(K)^{\perp}=\mathrm{Im}(\nabla_K^*)$, $\Phi(K)=\ker(\nabla_K^*)$, $\Phi(K)^{\perp}=\mathrm{Im}(\nabla_K)$. Справедливы ортогональные разложения

$$W(K)=\Phi(K)\oplus\Phi(K)^{\perp},\quad \boldsymbol{V}(K)=\boldsymbol{V}_0(K)\oplus\boldsymbol{V}_0(K)^{\perp},$$

причем ∇_K осуществляет изоморфизм пространств $\boldsymbol{V}_0(K)^{\perp}$ и $\Phi(K)^{\perp}$. Отсюда, в частности, следует, что $\dim\Phi(K)^{\perp}=\dim\boldsymbol{V}_0(K)^{\perp}$.

Теорема 3. *При условиях* $H_{1,2})$ *существует проектор* $\Pi_K:\ [W_q^1(K)]^d\to W(K)$, *при любом* $\tau\in[W_q^1(K)]^d$ *определяемый соотношениями*

$$(\nabla\cdot\Pi_K\tau,v)_K=(\nabla\cdot\tau,v)_K,\quad v\in V(K), \tag{3}$$

$$(\Pi_K\tau\cdot n_K,\lambda)_{\partial K}=(\tau\cdot n_K,\lambda)_{\partial K},\quad \lambda\in\Lambda(\partial K), \tag{4}$$

$$(\Pi_K\tau,\sigma)_K=(\tau,\sigma)_K,\quad \sigma\in\Phi(K).$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\|\Pi_K\tau\|_{0,q,K}\leqslant c(|\tau|_{0,q,K}+h|\tau|_{1,q,K}),$$

$$\|\tau-\Pi_K\tau\|_{0,q,K}\leqslant c\,h|\tau|_{1,q,K},\quad \|\Pi_K\tau\|_{1,q,K}\leqslant c\,\|\tau\|_{1,q,K}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнено* $H_1)$. *Тогда необходимым и достаточным условием существования проектора* Π_K *со свойствами* (3), (4) *является условие* $H_2)$.

4. Пространства конечных элементов. $\inf - \sup$**-условия.**

Определим конечномерные пространства V_h и W_h, связанные с триангуляцией $\mathcal{T}_h$:

$$V_h=\{v\in L_\infty(\Omega):\ v|_K\in V(K),\ K\in\mathcal{T}_h\},\quad W_h=\{\tau\in[L_\infty(\Omega)]^d:\ \tau|_K\in W(K),\ K\in\mathcal{T}_h\}.$$

Определим также конечномерное пространство Λ_h функций на $\bar{\mathcal{E}}_h$. Пусть

$$\Lambda(e,\partial K)=\{\lambda|_e:\ \lambda\in\Lambda(\partial K)\},\quad e\in\partial K,\ K\in\mathcal{T}_h.$$

Введем следующее обозначение и одновременно ограничение на выбор пространств $\Lambda(\partial K)$, которое далее будем считать выполненным:

$H_1')$ $\Lambda(e)=\Lambda(e,\partial K)=\Lambda(e,\partial L)$ для $e=\bar K\cap\bar L\in\mathcal{E}_h$.

Условия вида $H_1')$ в МКЭ фактически не являются ограничениями. Положим

$$\Lambda_h=\{\lambda\in L_\infty(\bar{\mathcal{E}}_h):\ \lambda|_e\in\Lambda(e),\ e\in\mathcal{E}_h;\ \lambda|_{\mathcal{E}_h^\partial}=0\},\quad \boldsymbol{V}_h=V_h\times\Lambda_h.$$

Отметим, что функции из V_h и W_h не обязаны быть непрерывными на Ω, а также на них не накладывается никаких краевых условий. Таким образом, $V_h\subset W_\infty^1(\mathcal{T}_h)$, $W_h\subset[W_\infty^1(\mathcal{T}_h)]^d$. Кроме того, $v|_{\partial K}$,

$\tau \cdot n_K|_{\partial K} \in L_\infty(\partial K)$ для $v \in V_h,\ \tau \in W_h$ и $K \in \mathcal{T}_h$. Из условия H_1') следует, что $\Lambda_h \subset C(\bar{\mathcal{E}}_h)$, если $\Lambda(\partial K) \subset C(\partial K)$ для всех $K \in \mathcal{T}_h$. Здесь $C(\partial K)$ — пространство непрерывных функций на ∂K. При $\Lambda(\partial K) = \prod_{e\in\partial K} \Lambda(e)$ для любого $K \in \mathcal{T}_h$ имеем $\Lambda_h = \prod_{e\in\bar{\mathcal{E}}_h} \Lambda(e)$. В этом случае $\Lambda_h \not\subseteq C(\bar{\mathcal{E}}_h)$.

Введем следующее подпространство пространства W_h

$$\overline{W}_h = \{\tau \in W_h : \ (\tau \cdot n, \lambda)_{\partial\mathcal{T}_h} = 0,\ \lambda \in \Lambda_h\}.$$

Далее пара $(V_h, \overline{W}_h)$ рассматривается как аппроксимация $(L_p(\Omega), H_q(\operatorname{div};\Omega))$. В зависимости от выбора локальных пространств $\Lambda(\partial K)$ пространство $\overline{W}_h$ может быть как конформной (внутренней), так и неконформной аппроксимацией $H_q(\operatorname{div};\Omega)$.

4.1. Глобальный проектор Π_h. Определим проектор $\Pi_h \ :\ [W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d \to W_h$ так, что $(\Pi_h\tau)|_K = \Pi_K(\tau|_K)$ для любых $\tau \in [W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d$ и $K \in \mathcal{T}_h$. Отметим некоторые его свойства, непосредственно вытекающие из указанных ранее свойств Π_K. Для любого $\tau \in [W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d$ имеют место следующие утверждения:

$$(\nabla \cdot \Pi_h\tau, v)_{\mathcal{T}_h} = (\nabla\cdot\tau, v)_{\mathcal{T}_h}, \quad v \in V_h,$$
$$\|\Pi_h\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h} \leqslant C\,\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$), $H_h = H_q(\operatorname{div};\Omega)\cap[W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d$. *Тогда a)* $\Pi_h H_h \subset \overline{W}_h$; *b) если* $\Lambda_h = \prod_{e\in\bar{\mathcal{E}}_h}\Lambda(e)$ *и дополнительно выполнено условие*
H_3) $W_n(e,K) = W_n(e,L),\ e = \bar{K}\cap\bar{L} \in \mathcal{E}_h;\ \dim\Lambda(e) = \dim W_n(e,K),\ e \in \partial K,\ K \in \mathcal{T}_h$,
то $\overline{W}_h \subset H_q(\operatorname{div};\Omega)$. *Здесь* $W_n(e,K) = \{\tau\cdot n_K|_e,\ \tau \in W(K)\}$.

4.2. Дискретные $\inf - \sup$**-условия.** Существование устойчивого в $[W_q^1(\mathcal{T}_h)]^d$ глобального проектора Π_h, позволяет доказать дискретный аналог теоремы 1, используя прием Фортина.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда*

$$\sup_{\tau\in W_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h}) \geqslant \sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{1,q,\mathcal{T}_h}) \geqslant c\,C_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega}, \quad v \in V_h,$$

где $p \in (1,\infty),\ 1/p + 1/q = 1$, *постоянная* $C_D(\Omega)$ *определена в лемме 1.*

Следствие. *Пусть выполнены условия* $H_{1,2}$). *Тогда для любого* $v \in V_h$

$$\sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{0,q,\Omega}) \geqslant \sup_{\tau\in\overline{W}_h}(|(v,\nabla\cdot\tau)_{\mathcal{T}_h}|/\|\tau\|_{H_q(\operatorname{div};\mathcal{T}_h)}) \geqslant c\,C_D^{-1}(\Omega)\|v\|_{0,p,\Omega}.$$

Доказательства всех указанных выше утверждений приведены в [3] и в [4] при $p = 2$. В этих же работах указаны примеры пространств конечных элементов, удовлетворяющих условиям $H_{1,2}$), включающие классические пространства конформных d-симплициальных и d- прямоугольных элементов типа RT_k, BDM_k и $BDFM_k$, а также приведены примеры неконформных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Scheurer B.** Existence et approximation de point-shelle pour certains problèmes non linéaires // RAIRO Anal. Numer. — 1977. — V. 11, № 4. — P. 369—400.
2. **Farhloul M., Manouzi H.** On a mixed finite element method for the p-Laplasian // Canadian Applied Mathematics Quathrly. — 2000. — V. 8, № 1. — P. 67—78.
3. **Даутов Р.З.** Об $\inf - \sup$-условиях и проекторах в теории смешанных методов конечных элементов //Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — С. 909—922.
4. **Даутов Р.З., Федотов Е.М.** Абстрактная теория HDG-схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 3. — С. 94—112.

REFERENCES

1. **Scheurer B.** Existence et approximation de point-shelle pour certains problèmes non linéaires // RAIRO Anal. Numer. – 1977. – V. 11, № 4. – P. 369–400.
2. **Farhloul M., Manouzi H.** On a mixed finite element method for the p-Laplasian // Canadian Applied Mathematics Quathrly. – 2000. – V. 8, № 1. – P. 67–78.
3. **Dautov R.Z.** On $\inf - \sup$ conditions and projections in the theory of mixed finite-element methods // Differential equations. – 2014. – V. 50, № 7. – P. 913–926.
4. **Dautov R.Z., Fedotov E.M.** Abstract theory of hybridizable discontinuous Galerkin methods for second-order quasilinear elliptic problems // Computational mathematics and mathematical physics. – 2014. – V. 54, № 3. – P. 474–490.